Université de Franche Comté
UFR Sciences et Techniques

M1 Modélisation Statistique
Simulation et logiciel R

TRAVAUX DIRIGÉS

---

1 Simulation de variables aléatoires

Exercice 1 (méthode d'inversion - simulation de la loi de Weibull)
La loi de Weibull de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ généralise la loi exponentielle et a pour fonction de répartition

$$F(x) = 1 - \exp(-(\lambda x)^a), \quad x > 0.$$

Comment simuler une variable aléatoire de loi de Weibull avec la méthode d'inversion ?

Exercice 2 (méthode d'inversion - simulation de la loi de Pareto)
Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \alpha x^{-\alpha-1} 1_{[1,\infty[}(x).$$

1. Vérifier que f est bien une densité puis calculer la fonction de répartition F associée.
2. En déduire la fonction quantile F^{-1}.
3. Comment simuler X à partir de la loi uniforme ?

Exercice 3 (simulation de la loi de Bernoulli)
Soit $U_1, \ldots, U_n$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Soit $p \in [0, 1]$. Quelle est la loi de $X_i = 1_{[0,p]}(U_i)$?
2. En déduire la loi de $Y = \sum_{i=1}^n 1_{[0,p]}(U_i)$

Exercice 4 (loi géométrique)
On note $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x.

1. Soit X de loi exponentielle de loi $\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Montrez que pour $r \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbb{P}(\lceil X \rceil = r) = \mathbb{P}(r - 1 < X \leq r) = e^{-\lambda(r-1)}(1 - e^{-\lambda r}).$$
2. Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que, pour U de loi uniforme sur $[0, 1]$,
$$X = \lceil \log(U)/\log(1 - p) \rceil$$
suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 5 (acceptation rejet - loi Beta)
La densité Beta de paramètre 2 et 5 est $f(x) = 30x(1-x)^4$, $0 \leq x \leq 1$.
Construisez un algorithme d'acceptation-rejet de cette loi en utilisant la densité uniforme $U(0,1)$ comme densité instrumentale et donnez son efficacité.

Exercice 6 (acceptation rejet - loi normale)
Pour $\lambda > 0$, on définit la densité double exponentielle sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$.

1. Comment peut-on simuler selon la loi double-exponentielle ?
2. Construisez un algorithme d'acceptation-rejet pour la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ en utilisant comme densité instrumentale la densité g_λ.
3. Discuter l'efficacité de l'algorithme en fonction de λ. Existe-t-il une valeur optimale ?

Exercice 7 (conditionnement et méthode du rejet)
Soit X un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ de loi P_X et $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$ un ensemble borélien. On note $p = P_X(B)$ et on suppose que $p > 0$.

La loi de X sachant $X \in B$ est définie par

$$P_{X|B}(A) = p^{-1}P_X(A \cap B), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

On suppose que l'on est capable de générer des variables (X_n) indépendantes et de loi P_X et l'on souhaite générer une variable de loi $P_{X|B}$.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des vaiid de loi P_X. Montrer que la variable aléatoire
$$N = \min\{n \geq 1 \ : \ X_n \in B\}$$
suit une loi géométrique de paramètre p.
2. Montrer que X_N suit la loi $P_{X|B}$ et est indépendant de N.
3. En déduire un algorithme incluant une boucle WHILE permettant de générer n variables aléatoires aléatoires indépendantes de loi $P_{X|B}$.

Exercice 8 (méthode du ratio)
Soit h une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $I = \int h(x)dx > 0$. On note C l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < u < \sqrt{h(v/u)}\}.$$

1. A l'aide du changement de variable $(u,v) \mapsto (u, x = v/u)$, montrez que C a une aire finie notée $|C|$.
2. On considère un couple de variable aléatoire (U,V) distribué uniformément sur C, c'est à dire de densité $\frac{1}{|C|}1_C(x,y)$. Montrer que la variable aléatoire $X = V/U$ admet pour densité la fonction $f(x) = h(x)/\int h(y)dy$.
3. On suppose que les fonction $h(x)$ et $x^2h(x)$ sont bornées et on note
$$a = \sup\{h(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \quad b^+ = \sup\{x^2h(x) \ : \ x \geq 0\}, \quad b^- = \sup\{x^2h(x) \ : \ x \leq 0\}.$$
Montrer que $C \subset [0, \sqrt{a}] \times [-\sqrt{b^-}, \sqrt{b^+}]$ puis justifier que l'algorithme suivant génère une variable de densité f :

(i) Générez U_1, U_2 indépendantes uniforme sur $[0,1]$ et posez

$$U = \sqrt{a}U_1, \quad V = -\sqrt{b^-} + (\sqrt{b^-} + \sqrt{b^+})U_2.$$

;

(ii) Tant que $(U,V) \notin C$ répétez l'étape (i).

(iii) Retournez $X = V/U$.

4. Quelle est le nombre moyen d'itération pour une simulation ?
5. Déterminez a, b^-, b^+ lorsque $h(x) = e^{-x^2/2}$.

2 Méthodes de Monte-Carlo

Exercice 9 (intégrales et méthode de Monte-Carlo)
Pour chacune des intégrales ci-dessous, proposer deux méthodes de Monte-Carlo permettant de les calculer :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \cos(x^3)e^{-x}\mathrm{d}x, \\ I_2 &= \int_0^\infty \sin(x^4)e^{-2x}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x, \\ I_3 &= \int_{-1}^1 \log(1+x^2)e^{-x^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Exercice 10 (nécessité des méthodes de réduction variance)
On suppose que l'on souhaite appliquer une méthode de Monte-Carlo pour estimer

$$m(\beta) = \mathbb{E}[e^{\beta X}] \quad \text{avec } X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On se donne X_i, $i \geq 1$, des v.a.i.i.d. de même loi que X et on pose

$$\hat{m}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\beta X_i}.$$

1. Montrez que $m(\beta) = e^{\beta^2/2}$.
2. Calculez la variance de l'estimateur de Monte-Carlo $\hat{m}_n$.
3. On suppose que l'on veut une précision relative de 1%. Plus précisément, on veut qu'avec probabilité 95%, on ait
$$\left|\frac{\hat{m}_n - m(\beta)}{m(\beta)}\right| \leq 0.01.$$
Comment faut-il choisir n ? Donner une application numérique lorsque $\beta = 3$ et $\beta = 5$.

Exercice 11 (échantillonnage préférentiel - calculs explicites)
On veut calculer $p = \mathbb{P}(X \in [x, x+1])$ pour X une variable exponentielle de paramètre 1 et $x > 0$.

1. Décrivez la méthode de Monte-Carlo naïve et donnez sa variance.
2. Combien faut-il de simulations pour une erreur relative de 1% ?
3. Proposez une méthode d'échantillonage préférentiel où tous les tirages sont dans $[x, x+1]$ et donnez sa variance.
4. Comparez les deux méthodes quand $x \to \infty$. On comparera les variances ainsi que les nombres de simulations nécessaires pour obtenir une erreur relative de 1%
5. Améliorez la méthode d'échantillonage préférentiel en utilisant des variables antithétiques. Le gain de variance est-il substantiel ?

Exercice 12 (variable de contrôle et stratification - calculs explicites)
On souhaite calculer par une méthode de Monte-Carlo

$$m(\beta) = \mathbb{E}[e^{\beta X} 1_{\{X>0\}}] \quad \text{avec} \quad X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

1. Calculez la valeur théorique de $m'(\beta)$.
2. On suppose que l'on connaît la valeur théorique de $\mathbb{E}[e^{\beta X}] = e^{\beta^2/2}$ (cf exercice 2).
   (a) Ecrivez la méthode de Monte Carlo avec variable de contrôle associée.
   (b) Calculez la covariance entre $e^{\beta X}$ et $e^{\beta X} 1_{\{X>0\}}$.
   (c) Quel est le facteur de réduction de variance permis par la variable de contrôle ?
3. On souhaite mettre en place une méthode de stratification en 3 strates : $X \in]-\infty, 0[$, $X \in [0, x[$ et $X \in [x, +\infty[$.
   (a) Décrivez la méthode. Comment simule-t-on une variable gaussienne conditionnée à être dans $[a, b]$?
   (b) Calculez la variance sur chaque strate et la variance de l'estimateur de Monte-Carlo stratifié avec allocation optimale.
   (c) Quel est le facteur de réduction de variance permis par la stratification ? Il y a-t-il un choix optimal pour x ?