Master Modélisation Statistique M2
Finance - chapitre 4
Mouvement Brownien et modèle de Black-Scholes

Clément Dombry,
Laboratoire de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté.

Motivations et objectif du cours

- Il s'agit de modéliser un marché financier en temps continu. Le modèle est plus réaliste, car les cours des actions sont généralement cotés de manière continue : par exemple pour le CAC40.
- Le modèle principal est le modèle de Black-Scholes et se base sur le mouvement Brownien.
- Après avoir définit le mouvement Brownien, on étudiera quelques propriétés et on verra que le mouvement Brownien apparaît comme limite de marches aléatoires renormalisées.
- Finalement, on introduira le modèle de Black-Scholes comme limite du modèle de Cox-Ross-Rubinstein.
- On établira la formule de Black-Scholes donnant le prix des options européennes (call et put).

Plan du cours

Notion de processus stochastique

Un processus stochastique représente l'évolution aléatoire d'une quantité dans le temps : la valeur $X_t(\omega)$ représente la quantité au temps t pour la réalisation ω.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- On appelle processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une collection X_t de variables aléatoires (i.e. pour tout $t \geq 0$, $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable).
- On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est à trajectoires continues si il existe un ensemble de probabilité nulle N tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue.

Master Modélisation Statistique

Notion de processus stochastique

Un processus stochastique représente l'évolution aléatoire d'une quantité dans le temps : la valeur $X_t(\omega)$ représente la quantité au temps t pour la réalisation ω.

Définition

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique.

- On appelle accroissement de X entre les temps t_1 et t_2 la variable aléatoire $X_{t_2} - X_{t_1}$.
- On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout $k \geq 2$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, les variables $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq k$ sont indépendantes.

Notion de mouvement Brownien

Définition

On appelle mouvement Brownien standard $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à trajectoires continues vérifiant

i) $B_0 = 0$ p.s.,

ii) pour tout $0 \leq t_1 < t_2$, $B_{t_2} - B_{t_1} \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$,

iii) pour tout $k \geq 2$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{1 \leq i \leq k}$ sont indépendants.

Par définition du mouvement Brownien, les accroissements sont Gaussiens (ii) et indépendants (iii). Remarquons que l'existence du mouvement Brownien est non triviale, notamment la continuité des trajectoires.

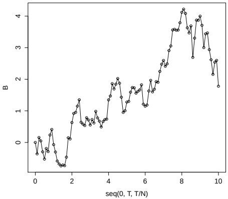
Simulation d'un mouvement Brownien

- Avec un ordinateur, on peut simuler très simplement les valeurs du processus $(B_t)_{t\geq 0}$ en un nombre fini de points.
- Par exemple, pour $t_k = \frac{kT}{n}$, $0 \leq k \leq n$ variant entre $t_0 = 0$ et $t_n = T$, on commence par simuler les accroissements $\Delta_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$, $0 \leq k \leq n$, qui sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, T/n)$ et on pose

$$B_0 = 0, \quad B_{t_k} = \sum_{i=1}^{k} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

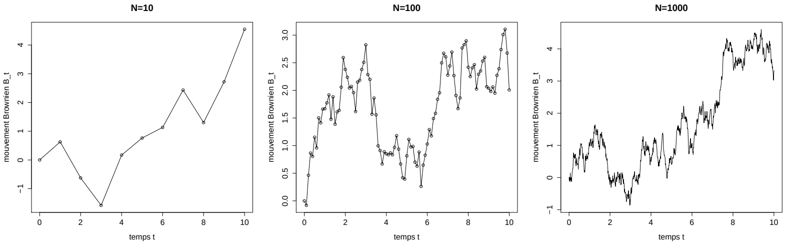
- Avec le logiciel R :

```
T<-10
N<-100
D<-rnorm(N,0,sqrt(T/N))
B<-c(0,cumsum(D))
plot(seq(0,T,T/N),B,type='ol')
```



Simulation d'un mouvement Brownien

- Attention, cette représentation est trompeuse car le logiciel fait une interpolation linéaire ! On a donc une représentation approchée du mouvement Brownien.
- Evidemment la qualité de cette représentation est meilleure lorsque N est grand :



Propriétés du mouvement Brownien

Proposition

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien :

- (covariance) pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $\mathrm{Cov}(B_{t_1}, B_{t_2}) = \min(t_1, t_2)$;
- (symétrie) le processus $(-B_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement Brownien ;
- (propriété de Markov) pour tout $a > 0$ le processus $(B_{a+t} - B_a)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien ;
- (autosimilarité) pour tout $c > 0$ $(c^{-1/2}B_{ct})_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Propriétés du mouvement Brownien

Définition

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ un processus aléatoire et $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s; s \leq t)$ la filtration naturelle. On dit que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale si pour tout $0 \leq s \leq t$, M_t est intégrable et

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Proposition

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Alors :

i) $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale ;

ii) $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale ;

iii) $(\exp(B_t - t/2))_{t \geq 0}$ est une martingale.

Marche aléatoire et théorème de Donsker

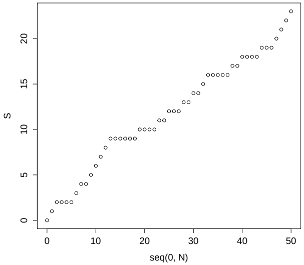
Définition

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d.
On appelle marche aléatoire la suite de variable aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1$$

- Simulation avec R dans le cas Bernoulli $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$:

```
N<-50
p<-1/2
X<-rbinom(N,1,0.5)
S<-c(0,cumsum(X))
plot(seq(0,N),S,type='p')
```



Marche aléatoire et théorème de Donsker

- On étend la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ au temps continu par interpolation linéaire
$$S_t = S_n + (t-n)X_{n+1}, \quad n \leq t \leq n+1.$$

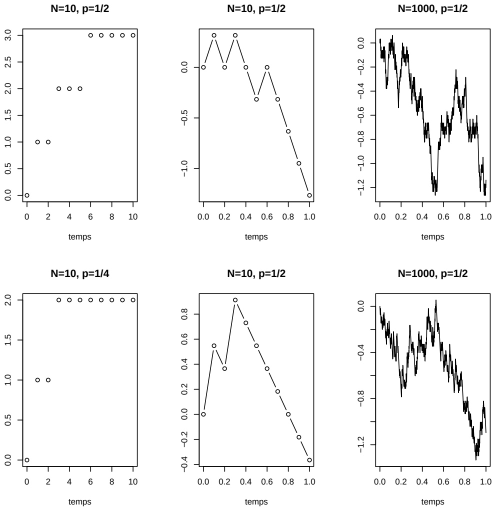
Théorème de Donsker

On suppose les X_i de carré intégrable de moyenne m et variance σ^2. Alors la marche aléatoire renormalisée
$$\left(\frac{S_{nt} - ntm}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0}$$
converge en loi vers un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Ce résultat généralise le TCL que l'on retrouve lorsque $t = 1$.

Illustration du théorème de Donsker

Avec R, on simule la marche aléatoire (renormalisée) de Bernoulli avec $p = 1/2$ ou $p = 1/4$, pour $N = 10$ ou $N = 1000$.



Plan du cours

Modèle de Black-Scholes

On cherche à modéliser le cours d'un actif coté en temps continu par un processus aléatoire $(S_t)_{t\geq 0}$.

Définition

Le modèle de Black-Scholes de prix initial $S_0 > 0$, rendement instantané μ et volatilité $\sigma > 0$ est donné par

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right), \quad t \geq 0,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

Propriétés du processus de Black-Scholes

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right), \quad t \geq 0,$$

Propriétés

- Le processus $(S_t)_{t\geq 0}$ est à trajectoires continues et démarre en S_0 pour $t = 0$.
- Pour tout $t \geq 0$, S_t suit une loi log normale

$$\ln(S_t) \sim \mathcal{N}(\ln(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$$

- L'espérance de S_t est donnée par

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{\mu t}$$

ce qui explique l'interprétation de μ comme rendement instantané.

Propriétés du processus de Black-Scholes

De l'équation

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right), \quad t \geq 0,$$

on déduit facilement que pour tout $t \geq 0$, $h > 0$

$$S_{t+h} = S_t e^{(\mu - \sigma^2/2)h} e^{\sigma(B_{t+h} - B_t)}.$$

Avec un développement de Taylor heuristique, pour $h \approx 0$

$$S_{t+h} \approx S_t \Big(1 + (\mu - \sigma^2/2)h\Big) \Big(1 + \sigma(B_{t+h} - B_t) + \sigma^2/2(B_{t+h} - B_t)^2\Big).$$

On va à l'ordre 2 pour la partie Brownienne car $\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2] = h$ et on peut montrer que les termes $-\sigma^2/2h$ et $\sigma^2/2(B_{t+h} - B_t)^2$ se compensent en moyenne ce qui conduit à

$$S_{t+h} \approx S_t + \mu S_t h + \sigma S_t (B_{t+h} - B_t).$$

La formulation rigoureuse se fait par la théorie des équations différentielles stochastiques :

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t.$$

Black-Scholes comme limite de Cox-Ross-Rubinstein

Rappels :

- Le modèle CRR est un modèle à temps discret $n = 0, \ldots N$ où le rendement de l'actif à chaque pas de temps ne prend que deux valeurs possibles $1 + a$ et $1 + b$, $a < b$.
- Pour que le marché soit viable, le taux d'intérêt par période r doit vérifier $r \in [a, b]$.
- Il existe alors une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle les variables de rendement $R_n = S_n/S_{n-1} - 1$, $1 \leq n \leq N$ sont i.i.d. et d'espérance r :

$$a\mathbb{P}^*(R_n = a) + b\mathbb{P}^*(R_n = b) = r$$

  d'où

$$\mathbb{P}^*(R_n = a) = p\delta_a + (1-p)\delta_b \quad \text{avec } p = \frac{b-r}{b-a}.$$

- Pour $n = 0, \ldots, N$, on a

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + R_i).$$

Black-Scholes comme limite de Cox-Ross-Rubinstein

Asymptotique :

- Pour obtenir un modèle continu sur $[0, T]$ à la limite, on suppose le nombre de période $N \to \infty$ et que chaque période est de durée $T/N \to 0$.
- Les paramètres $a, b, r > 0$ dépendent alors de N et on pose

$$r = e^{rT/n} - 1, \quad \log\left(\frac{1+a}{1+r}\right) = -\sigma\sqrt{T/N}, \quad \log\left(\frac{1+b}{1+r}\right) = \sigma\sqrt{T/N}.$$

  On en déduit

$$1+a = \exp\left(rT/N - \sigma\sqrt{T/N}\right), \quad 1+b = \exp\left(rT/N + \sigma\sqrt{T/N}\right), \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4}\sqrt{T/N} + o(\sqrt{T/N})$$

- Le modèle Cox-Ross-Rubinstein est alors donné par $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} S_t^N &= S_{[tN/T]}^N = S_0 \prod_{i=1}^{[tN/T]} (1+R_i) = S_0 \prod_{i=1}^{[tN/T]} \exp\left(rT/N + \varepsilon_i \sigma\sqrt{T/N}\right) \\ &= S_0 \exp\left(rt + \sigma\sqrt{T/N} \sum_{i=1}^{[tN/T]} \varepsilon_i\right) \end{aligned}$$

  avec $\varepsilon_i = 1_{\{R_i = b\}} - 1_{\{R_i = a\}}$ i.i.d. de loi $p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1$.

Black-Scholes comme limite de Cox-Ross-Rubinstein

Asymptotique :

- On a $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 1 - 2p \sim -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T/N}$ et $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) \sim 1$ d'ou

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{T/N}\sum_{i=1}^{[tN/T]} \varepsilon_i\right] \sim \sqrt{T/N}\,[tN/T]\,(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{T/N}) \sim -\frac{\sigma}{2}t$$

  et

$$\mathrm{Var}\left[\sqrt{T/N}\sum_{i=1}^{[tN/T]} \varepsilon_i\right] \sim t/N\,[tN/T] \sim t.$$

- On peut montrer un résultat à la Donsker :

$$\left(\sqrt{T/N}\sum_{i=1}^{[tN/T]} \varepsilon_i + \frac{\sigma}{2}t\right)_{0\leq t\leq T} \Longrightarrow (B_t)_{0\leq t\leq T} \quad \text{mouvement Brownien.}$$

- En revenant au modèle CCR, on obtient

$$(S_t^N)_{0\leq t\leq T} \Longrightarrow \left(S_0 \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)\right)_{0\leq t\leq T}.$$

  On retrouve bien le modèle de Black-Scholes avec $r = \mu$!!!

Plan du cours

Prix de du call

- Rappelons que dans le modèle Cox-Ross-Rubinstein, le prix du Call à l'instant 0 est donné par

$$C_0 = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*[(S_N - K)^+]$$

- En passant à la limite, on obtient la formule pour le modèle Black-Scholes

$$C_0 = e^{-RT}\mathbb{E}^\star \left[(S_T - K)^+\right)$$

avec (S_t) processus de Black-Scholes.

- En particulier, S_T suit une loi log-normale

$$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}(\ln(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T)$$

Prix de du call

On peut donc écrire C_0 comme une intégrale gaussienne, qui se calcule avec un peu d'efforts ! On obtient

Théorème de Black-Scholes

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix du put est donné par

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

avec Φ la f.r. de la loi normale et

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$