Master Modélisation Statistique M2
Finance - chapitre 3
Modèles financiers discrets

Clément Dombry,
Laboratoire de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté.

Motivations

- L'objectif est de présenter les principales idées de la théorie de l'**évaluation du prix des options** dans le cadre mathématiquement très simple des modèles discrets.
- En partant d'une idée concrète simple, celle de l'**absence d'opportunité d'arbitrage**, on voit intervenir de manière centrale la notion probabiliste de martingale.
- Le chapitre se conclue sur l'étude du modèle le plus simple : le **modèle de Cox-Ross-Rubinstein**.
- Ce cours suit assez fidèlement le chapitre 1 de *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance* par Lamberton et Lapeyre.

Plan du cours

Modèle de marché discret

- On modélise un marché discret avec un actif sans risque et d actifs risqués évoluant en temps discret $n = 0, 1, \dots, N$ par :
  - un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
  - des valeurs déterministe $S^0 = (S_n^0)_{0 \le n \le N}$ représentant le cours de l'actif sans risque (par convention $S_0^0 = 1$) ;
  - des vecteurs aléatoires $S^i = (S_n^i)_{0 \le n \le N}$, $1 \le i \le d$, représentant le cours des actifs risqués ;
  - tous les cours initiaux sont supposés connus, i.e. S_0^i déterministes $i = 1, \dots, d$.
- On note :
  - $S_n = (S_n^i)_{0 \le i \le d}$ le vecteur des prix au temps n.
  - $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$ la tribu représentant l'information disponible au temps n.

Modèle de marché discret

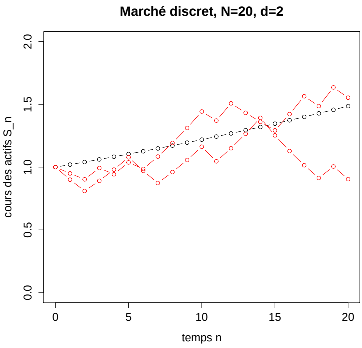
- Remarques sur l'actif sans risque et l'actualisation des prix :
  - le coefficient d'actualisation des prix est $\rho_{0,n} = 1/S_0^n$, i.e. il faut placer une valeur $\rho_{0,n}$ aujourd'hui sur l'actif sans risque pour avoir 1 à la date n ;
  - on note $\tilde{S}_n = \rho_{0,n} S_n$ le vecteur des prix actualisés ;
  - dans le cas d'un taux d'intérêt constant r,

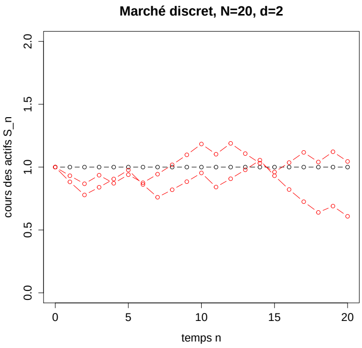
$$S_0^n = (1+r)^n \quad \text{and} \quad \rho_{0,n} = (1+r)^{-n}.$$

- Remarques sur les tribus :
  - La tribu initiale est $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ la tribu triviale ;
  - Les tribus croissent, i.e. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, on dit que $(\mathcal{F}_n)_{0 \le n \le N}$ est une filtration.

Modèle de marché discret

Représentation graphique : $d = 2$, $N = 20$, taux constant $r = 2\%$.





Stratégie

Definition

Une *stratégie de gestion* est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\phi = ((\phi_n^0, \ldots, \phi_n^d))_{0 \le n \le N}$$

qui est *prévisible*, c-à-d que pour tout $i = 0, \ldots, d$:

$$\phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0 - \text{mesurable et pour} n = 1, \ldots N, \; \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} - \text{mesurable.}$$

- Interprétation :
  - ϕ_n^i représente la quantité d'actif i investie dans le portefeuille de gestion à la date n ;
  - au temps $n = 0$, cette quantité est déterministe ;
  - la composition du portefeuille au temps n a été constitué au vu des informations disponibles à la date $n - 1$ et conservé tel quel au moment des cotations à la date n.

Stratégie

Definition

La valeur du portefeuille au temps n est

$$V_n(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i = \phi_n \cdot S_n.$$

Sa valeur actualisée est

$$\tilde{V}_n(\phi) = \rho_{0,n} V_n(\phi) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n.$$

Stratégie

Definition

La stratégie est dite autofinancée si pour tout $n = 0, \ldots, N-1$

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

- Interprétation :
  - à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours S_n la valeur du portefeuille est $\phi_n \cdot S_n$;
  - l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1} toujours au cours en vigueur au temps n ;
  - ce réajustement est fait en réinvestissant la valeur totale du portefeuille $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ et rien de plus ;
  - il n'y a donc ni apport ni retrait de fonds.

Stratégie

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la stratégie ϕ est autofinancée ;

ii) on a pour tout $n = 1, \ldots, N$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j, \quad \text{avec } \Delta S_j = S_j - S_{j-1};$$

iii) on a pour tout $n = 1, \ldots, N$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j, \quad \text{avec } \Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1};$$

Preuve : au tableau

Stratégie

- En remarquant que $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$, la proposition précédente implique que la valeur actualisée (et donc la valeur tout court) d'un portefeuille autofinancée ne dépend que de la valeur initiale $V_0(\phi)$ et du processus des actifs risqués $(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$.
- Plus précisément :

Proposition

Pour tout processus prévisible $(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et pour toute valeur V_0, il existe un unique processus prévisible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tel que la stratégie $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ soit autofinancée et de valeur initiale V_0.

Preuve : au tableau

Stratégie

- On a donné aucune condition de signe sur la composition du portefeuille :
  - $\phi_n^0 < 0$ correspond à un emprunt de la quantité $|\phi_n^0|$ sur l'actif sans risque ;
  - $\phi_n^i < 0$ correspond à une dette libellée en actif risqué (par suite de vente à découvert).
- On impose cependant que la valeur globale du portefeuille soit toujours positive ou nulle, de sorte que l'investisseur soit en mesure de rembourser ses dettes à tout instant.

Définition

Une stratégie ϕ est dite admissible si elle est auto-financée et si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n = 0, \ldots, N$.

Plan du cours

Notion d'arbitrage

Définition

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

- L'arbitrage permet, à partir d'une richesse initiale nulle, de construire un portefeuille de valeur toujours positive et de parvenir à une richesse finale strictement positive avec probabilité non nulle.

Définition

On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

- On parle parfois d'hypothèse AOA pour Absence d'Opportunité d'Arbitrage.

Exemples d'arbitrage

Exercice : unicité de l'actif sans risque sur un marché viable
On considère un marché viable contenant deux actifs sans risque $S^0 = (S_n^0)_{0 \le n \le N}$ et $\mathcal{S}^0 = (\mathcal{S}^0)_{0 \le n \le N}$ tels que $S_0^0 = \mathcal{S}_0^0 = 1$.

1. Montrer que s'il existe $n \geq 1$ tel que $S_n^0 > \mathcal{S}_n^0$, on peut construire une stratégie d'arbitrage.
2. En déduire que sur un marché viable, l'actif sans risque est unique.

Exemples d'arbitrage

Exercice : Parité Call-Put
On considère un marché viable avec un actif sans risque S^0 et un actif risqué S^1. Sur ce marché sont disponibles une option d'achat et une option de vente portant sur l'actif risqué avec échéance N et prix d'écercice K. On note C_n et P_n la valeur à l'instant n de ces options et $\tilde{C}_n$, $\tilde{P}_n$ les valeurs actualisées. Il s'agit de montrer que sur un marché viable, la relation de parité suivante est vérifiée :

$$C_n - P_n = S_n^1 - \frac{S_n^0}{S_N^0} K.$$

1. Que valent C_N et P_N ?
2. En déduire que la relation de parité est vérifiée pour $n = N$.
3. Montrer que si la relation n'est pas vérifiée au temps $n = N - 1$, on peut construire une stratégie d'arbitrage.
   Essayer quelque chose du genre acheter un call, vendre un put et une action
4. Conclure par une récurrence descendante.

Rappel sur l'espérance conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G}$ une sous tribu et X une variable aléatoire intégrable.
Il existe une unique variable aléatoire Y qui soit $\mathcal{G}$-mesurable et vérifie

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A].$$

On appelle Y l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ et on note $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

Propriétés

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$;
- Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = X$.
- Plus généralement, si $X = X_1 X_2$ avec X_1 $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \mid \mathcal{G}] = X_1 \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}].$$

Notion de martingale

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F}_n$ (i.e. une suite croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$).

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 0}$ est adaptée si

$$\text{pour tout } n \geq 0,\ M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}$$

- On appelle martingale tout suite adaptée $(M_n)_{n \geq 0}$ et intégrable vérifiant

$$\text{pour tout } n \geq 1,\ \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle on obtient immédiatement qu'une martingale vérifie

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n] = \cdots = \mathbb{E}[M_0].$$

Master Modélisation Statistique

Exemple de martingale

Exercice :

Montrer que les processus $(M_n)_{n\geq 0}$ définis ci-dessous sont des martingales :

1. la marche aléatoire simple définie par
$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i,$$
avec $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ indépendantes d'espérance nulle.
2. le produit défini par
$$M_0 = 1, \quad M_n = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i,$$
avec $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ indépendantes, positives et d'espérance égale à 1.
3. le processus défini par
$$M_n = a^{-n} X_n$$
avec X_n le processus autorégressif
$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = aX_n + \varepsilon_n$$
avec $a \neq 0$ et $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ indépendantes d'espérance nulle.

Théorème fondamental

Le théorème suivant est appelé « Fondamental Theorem of Asset Pricing ».

Théorème

Le marché est viable si et seulement si il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

- On rappelle que deux probabilités sont équivalentes si elles ont les mêmes ensembles de mesure nulle.
  Ici dans le cadre discret, on peut supposer suppose $\mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. On doit donc avoir aussi $\mathbb{P}^*[\{\omega\}] > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- La condition est donc que pour tout $i = 1, \ldots, d$,

  $$(\tilde{S}_n^i)_{0 \leq n \leq N} \text{ est une } \mathbb{P}^*\text{-martingale}$$

  i.e.

  $$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_n^i \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{S}_{n-1}^i, \quad 1 \leq n \leq N.$$
- Preuve au tableau de la condition suffisante, condition nécessaire admise.

Plan du cours

Actif conditionnel

Définition

On appelle actif conditionnel (ou option ou produit dérivé) d'échéance N toute variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable, c'est à dire de la forme

$$H = h(S^0, S^1, \dots, S^d)$$

qui représente le profit (payoff) que dégage le produit dérivé à l'échéance N.

- On a ainsi déjà rencontré l'option européenne d'achat portant sur l'actif i

  $$H = (S_N^i - K)^+$$

  et l'action de vente

  $$H = (K - S_N)^+$$

- Autre exemple : les options asiatique font intervenir le prix moyen $\bar{S}N^i = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n^i$ et sont données respectivement parfois

  $$H = (\bar{S}_N^i - K)^+ \quad \text{et} \quad H = (K - \bar{S}_N)^+$$

Notion de réplication

Définition

On dit que l'actif conditionnel H d'échéance N est réplicable si il existe une stratégie admissible ϕ telles quel

$$V_N(\phi) = H.$$

On appelle ϕ une stratégie de réplication.

- La stratégie de réplication permet au vendeur de l'option de se couvrir, c'est à dire de provisionner en temps réel le montant nécessaire au paiement du payoff H. On parle de portefeuille de couverture.

Marché complet

Définition

On dit que le marché est complet si tout actif conditionnel d'échéance N est réplicable.

- L'hypothèse de marché complet est restrictive et sa justification économique est moins claire que celle de marché viable. Cependant, d'un point de vue mathématique, les marchés complets donnent un cadre simple pour l'évaluation de la valeur des options.

Caractérisation des marchés viables et complets

Théorème

Un marché est viable et complet si et seulement si il existe une **unique** probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

- La probabilité $\mathbb{P}^*$ s'appelle alors probabilité risque neutre.
- **Preuve** au tableau de la conditionnécessaire, condition suffisante admise.

Preuve au tableau de la conditionnécessaire, condition suffisante admise.

Evaluation et couverture des actifs conditionnels

Proposition

Soit un marché viable et complet, H un actif conditionnel et ϕ une stratégie de réplication. Alors

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[H/S_N^0]$$

et plus généralement

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{H}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n \right]; \quad n = 0, \ldots, N.$$

- **Interprétation :** si un investisseur vend à la date $n = 0$ l'option au prix $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[H/S_N^0]$, il a la possibilité en suivant la stratégie ϕ répliquant l'option de produire le payoff promis H à la date N et de se couvrir ainsi parfaitement.
- La stratégie de réplication ϕ n'est pas forcément unique mais que la valeur du portefeuille de couverture $V_n(\phi)$ ne dépend pas de ϕ.
- $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[H/S_N^0]$ est le juste prix (fair price) de l'option au temps 0.

Plan du cours

On considère un marché discret contenant un placement sans risque

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

et un actif risqué S_n pour lequel on suppose que pour chaque pas de temps, le rendement peut prendre deux valeurs a ou b avec $-1 < a < b$, ce qui s'écrit

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases} .$$

Le cours initial S_0 est donné. L'espace naturel des états possibles est donc

$$\Omega = \{a, b\}^N$$

où chaque N-uplet représente les rendements successifs $R_n = S_n/S_{n-1} - 1$, $n = 1, \ldots N$. On introduit naturellement $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la filtration $\mathcal{F}_n$ engendrée par $S_1, \ldots, S_n$. En faisant l'hypothèse que chaque éventualité $\omega \in \Omega$ à une probabilité non nulle, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ à l'équivalence près.

1. Montrer que le prix actualisé $(\tilde{S}_n)$ est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = r$ pour tout $n = 0, \dots, N-1$.
2. En déduire que pour le marché soit viable, il est nécessaire que $r \in]a, b[$.
3. Donner des exemples d'arbitrage si $r \leq a$ ou $r \geq b$.
4. On suppose pour la suite que $r \in]a, b[$ et on pose $p = (b-r)/(b-a)$. Montrer que $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale si et seulement si les variables $(R_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont i.i.d. de loi

$$\mathbb{P}[R_n = a] = p, \quad \mathbb{P}[R_n = b] = 1 - p.$$

En déduire que le marché est viable et complet.

1. On note C_n (resp. P_n) la valeur à l'instant n d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué de prix d'exercice K et d'échéance N.
   a) Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put
   $$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$
   b) Montrer que C_n peut s'écrire sous la forme $C_n = c(n, S_n)$, où c est une fonction que l'on explicitera à l'aide de K, a, b, r et p.
   c) Montrer que la fonction c vérifie la relation de récurrence, pour $n = 0, \dots, N-1$,
   $$c(n,x) = \frac{1}{1+r}\Big(pc(n+1, x(1+a)) + (1-p)c(n+1, x(1+b))\Big).$$
2. Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n, où Δ est une fonction que l'on déterminera à partir de la fonction c.

Master Modélisation Statistique