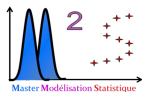


Master Modélisation Statistique M2

Finance - chapitre 2

Instruments et produits financiers

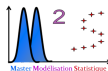
Clément Dombry,
Laboratoire de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté.



Motivations

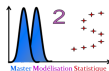
Quels sont les instruments financiers de base et quelle est leur utilités ?

- Placement sans risque, taux d'intérêt, actualisation des prix.
- Prêts et tableaux d'amortissements.
- Obligations : marché des obligations, prix d'une obligation, risque obligataire.
- SWAPS : swaps de taux, swaps de devises, utilité.
- Options d'achat et de vente, effet de levier et couverture.



Plan du cours

- 1 Placement sans risque, taux d'intérêt, actualisation des prix
- 2 Obligations
- 3 SWAPs : Swaps de taux, swaps de devises
- 4 Options de vente, options d'achat

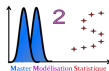


Placement sans risque et rendement

- L'actif sans risque est un actif qui présente des flux certains car son émetteur ne peut pas faire faillite. Il se caractérise donc par une rentabilité certaine. Ce taux est fondamental car il sert de base à la détermination de la rentabilité exigée de tout titre financier.
- **Exemple** : livret A, obligation d'état solvable (note AAA ...)
- **Rappel** : Dans le cas d'un placement sans risque de valeur V_{t_1} au temps t_1 et V_{t_2} au temps t_2 , les intérêts et le rendement entre t_1 et t_2 sont donnés par

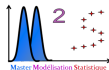
$$I_{t_1, t_2} = V_{t_2} - V_{t_1}$$
$$R_{t_1, t_2} = \frac{V_{t_2} - V_{t_1}}{V_{t_1}} = \frac{I_{t_1, t_2}}{V_{t_1}}$$

Le rendement d'un placement sans risque est déterministe (i.e. de variance nulle).



Taux d'intérêt

- Pour comparer plusieurs placements, le rendement ne suffit pas ; il faut aussi tenir compte de la durée $t_2 - t_1$ de placement (immobilisation de l'argent).
- Pour cela, on se donne une période de référence égale à un an et on introduit la notion de taux d'intérêt.
- Différentes notions de taux d'intérêt :
 - ▶ taux proportionnel : placement de durée de moins d'un an ;
 - ▶ taux actuariel : placement de durée supérieure à un an.



Taux d'intérêt proportionnel

Le taux d'intérêt proportionnel est utilisé pour les placements de durée t inférieure à un an, $t \leq 1$.

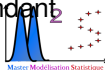
Taux proportionnel

Une placement nominal N placé entre les instants 0 et t au taux proportionnel $r_{0,t}^p$ libère au temps t le flux $N(1 + tr_{0,t}^p)$.

- Schéma des flux :



- Le taux d'intérêt dépend du temps de placement, d'où la notation $r_{0,t}$.
- Le rendement est $R_{0,t} = tr_{0,t}^p$ et les intérêts $I_{0,t} = Ntr_{0,t}^p$.
- Une somme de 500€ est placée au taux proportionnel de 4% pendant trois mois. Calculer le rendement, les intérêts.



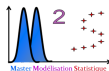
Exemples

- taux interbancaires EURIBOR et EONIA :
 - ▶ Euro Interbank Offered Rate (EURIBOR) : taux interbancaire offert entre banques de meilleures signatures pour la rémunération de dépôts dans la zone euro.
 - ▶ Euro Overnight Index Average (EONIA) : taux calculé par la BCE et diffusé par la FBE (Fédération Bancaire de l'Union Européenne) pour les taux interbancaires à 24h.

(source Banque de France)

- Equivalent américain : taux LIBOR
- Les taux du jour :

www.banque-france.fr/economie-et-statistiques/changes-et-taux/les-taux-interbancaires.html



Taux d'intérêt actuariel

Le taux d'intérêt actuariel est utilisé pour les placements de durée t supérieure à un an, $t \geq 1$.

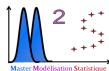
Taux actuariel

Une placement nominal N placé entre les instants 0 et t au taux actuariel $r_{0,t}^a$ libère au temps t le flux $N(1 + r_{0,t}^a)^t$.

- Schéma des flux :



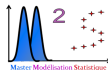
- Le rendement est $R_{0,t} = (1 + r_{0,t}^a)^t - 1$ et les intérêts $I_{0,t} = NR_{0,t}$.
- Une somme de 1000€ est placée au taux actuariel de 6% pendant 10 ans. Calculer le rendement, les intérêts.



Exemples

- taux moyens mensuels des bons du trésor (BTAN) et obligations assimilable du trésor (OAT) :

	01/2014	02/2014	03/2014	04/2014	05/2014
1 an	0,1770	0,1530	0,1920	0,1930	0,1532
2 ans	0,2714	0,2255	0,2581	0,2812	0,2366
5 ans	1,1083	0,9997	1,0119	0,9164	0,7499
10 ans	2,3841	2,2528	2,1519	2,0257	1,8384
30 ans	3,3710	3,2426	3,1605	3,0548	2,8713



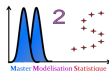
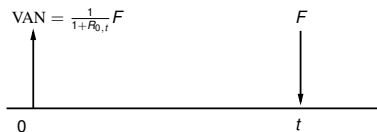
Actualisation des prix

- L'actualisation des prix consiste à prendre en compte la fluctuation du cours de l'argent du fait des placement sans risque.
- On a vu qu'un placement sans risque permet de dégager un certain rendement :

$$R_{0,t} = \begin{cases} tr_{0,t}^p & \text{pour un taux proportionnel} \\ (1 + r_{0,t}^a)^t - 1 & \text{pour un taux actuariel} \end{cases}$$

- On peut aussi considérer un produit financier qui libère le flux F à la date t et se demander quelle est la valeur de cet actif aujourd'hui. C'est la valeur actuelle nette :

$$VAN = \frac{1}{1 + R_{0,t}} F.$$



Actualisation des prix

Définition

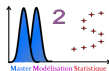
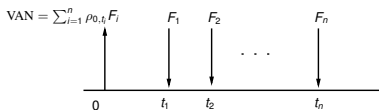
On appelle facteur d'actualisation la quantité

$$\rho_{0,t} = \frac{1}{1 + R_{0,t}} = \begin{cases} (1 + tr_{0,t}^p)^{-1} & \text{pour un taux proportionnel} \\ (1 + r_{0,t}^a)^{-t} & \text{pour un taux actuariel} \end{cases}$$

C'est la quantité d'argent qu'il faut placer aujourd'hui sur l'actif sans risque pour avoir 1€ à la date t .

Pour un produit financier à flux multiples,

$$\text{VAN} = \sum_{i=1}^n \rho_{0,t_i} F_i$$

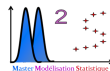


Application 1 : comparaison de produits financiers

Exercice 5 : (actualisation et comparaison de produits financiers)

On se propose de comparer 3 produits financiers A, B et C placés pendant 5 ans et qui libèrent les flux suivants à la fin de chaque année :

	2014	2015	2016	2017	2018	Total
A	13	14	16	18	20	
B	16	16	16	16	16	
C	17	17	16	16	13	



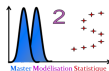
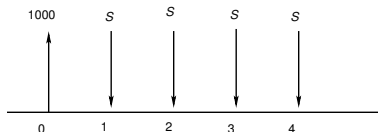
Application 2 : prêts et tableaux d'amortissement

Exercice 6 : (emprunt : calcul d'intérêts et tableau d'amortissement)

Une personne souhaite financer aujourd'hui un achat de $N = 1000\text{€}$ et décide d'emprunter cette somme sur 4 ans au taux annuel de $r = 5\%$.

L'établissement financier propose que la personne rembourse une somme constante S tous les ans.

- Du point de vue de l'établissement financier, les flux sont :



Application 2 : prêt et tableaux d'amortissement

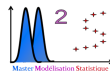
- Le taux étant constant, on en déduit

$$N = \frac{S}{1+r} + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)^3} + \frac{S}{(1+r)^4}$$

et donc $S = \dots$

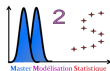
- On dresse ensuite le tableau d'amortissement :

Date	Échéance	Intérêt remboursé	Capital amorti	Capital restant dû après échéance
1				
2				
3				
4				



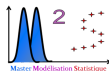
Plan du cours

- 1 Placement sans risque, taux d'intérêt, actualisation des prix
- 2 Obligations**
- 3 SWAPs : Swaps de taux, swaps de devises
- 4 Options de vente, options d'achat



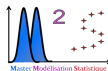
Notion d'obligation

- Une obligation est une valeur mobilière constituant un titre de créance représentatif d'un emprunt et donnant droit à des rendements obligataires.
- L'obligation est un contrat entre l'émetteur et les détenteurs successifs du titre, dont les deux éléments principaux sont l'échéancier des flux financiers et leur mode de calcul. Tout est fixé lors de l'émission obligataire à la création de l'obligation.
- Les émetteurs sont aussi bien des organismes privés que des collectivités publiques (en particulier les trésors publics).
- L'obligation est cessible et peut donc faire l'objet d'une cotation sur une bourse ou un marché secondaire. Dans la pratique, les volumes échangés se négocient principalement de gré à gré.
- Grâce aux revenus obligataires déterminés à l'avance, l'obligation est considérée comme moins risquée qu'une action, dont les revenus sont variables et souvent difficiles à prévoir. Le principal risque d'une obligation est le risque de faillite de l'émetteur = risque de défaut.



Marché des obligations

- Les gouvernements sont les plus gros émetteurs d'obligations du monde, les obligations sont alors appelées emprunt d'état. Le risque de non paiement est quasi nul. Les volumes massifs et réguliers émis impliquent une grande liquidité : ces titres peuvent être achetés et revendus facilement.
- Pour l'état français, on distingue trois types d'échéance :
 - ▶ court terme : maturité de moins de 1 an sans coupon intermédiaire (BTF = bon du trésor français)
 - ▶ moyen terme : maturité de 2 à 5 ans, coupon annuel fixe, remboursable in fine (BTAN = bon du trésor à intérêt annuel)
 - ▶ long terme : maturité de 5 à 30 ans, coupons annuels constants, remboursable in fine (OAT = obligation assimilable du trésor)

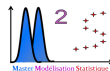


Marché des obligations

- Le marché des obligations émises par les entreprises est le 2ème au monde en terme de volume. Des agences de notations attribuent des degrés de solvabilité aux entreprises afin d'évaluer le risque de défaut.

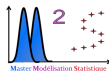
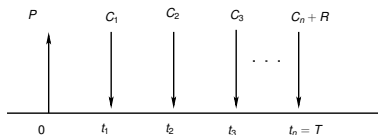
Echelle de notation financière selon les principales agences de notation

Signification de la note	Moody's		Standard & Poor's		Fitch Ratings		Dagong	
	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme
Prime	Aaa		AAA		AAA		AAA	
Première qualité	Aa1	P-1	AA+	A-1+	AA+	F1+	AA+	
High grade	Aa2	Prime	AA		AA		AA	A-1
	Aa3		AA-		AA-		AA-	
Upper medium grade	A1	-1	A+	A-1	A+	F1	A+	
	A2		A		A		A	
	A3		A-	A-2	A-	F2	A-	A-2
Lower medium grade	Baa1	P-2	BBB+		BBB+		BBB+	
Qualité moyenne inférieure	Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3	BBB	A-3
	Baa3		BBB-		BBB-		BBB-	
Non-investment grade, speculative	Ba1		BB+		BB+		BB+	B
	Ba2		BB		BB		BB	
	Ba3		BB-	B	BB-	B	BB-	
Highly speculative	B1	Not prime	B+		B+		B+	B
	B2		B		B		B	
	B3		B-		B-		B-	
Risque élevé	Caa1	Non prime	CCC+		CCC		CCC	C
Ultra spéculatif	Caa2		CCC		CCC		CCC	
En défaut, avec quelques espoirs de recouvrement	Caa3		CCC-	C	CCC	C	CCC	
	Ca	CC		CC		CC		
En défaut sélectif	C		C/CI/R		C		C	
			SD	D	RD	D	D	
En défaut			D		D		D	



Notion d'obligation

- Emetteur = vendeur = emprunteur
Investisseur = acheteur = prêteur
- L'obligation caractérisée par
 - ▶ P le prix à l'émission
 - ▶ T le maturité, i.e. la durée de vie de l'obligation (généralement en année)
 - ▶ C_1, \dots, C_n les coupons versés aux temps t_1, \dots, t_n , i.e. les revenus obligataires
 - ▶ R le remboursement à l'échéance T
- Diagramme des flux pour l'acheteur (cas $t_n = T$) :



Taux facial ou taux interne d'une obligation

Definition (taux facial d'une obligation)

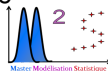
On appelle taux facial d'une obligation l'unique solution $r > -1$ de l'équation

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{R}{(1+r)^T} \quad (1)$$

- Pour prouver l'unicité de la solution, étudier la fonction

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n C_i x^{t_i} + R x^T.$$

- Montrer que $r > 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n C_i + R > P$.
- On peut interpréter l'équation (1) comme le fait que le taux facial r est le taux d'intérêt constant sans risque permettant d'égaliser le prix de l'obligation P et la VAN des flux dégagés.

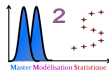


Taux facial ou taux interne d'une obligation

Proposition

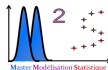
On considère une obligation de maturité T année ($T \geq 1$ entier), de prix P , de valeur de remboursement $R = P$ et de coupons constants C versés en fin de chaque année. Son taux facial est $r = C/P$.

- Preuve en **Exercice 7**



Taux facial ou taux interne d'une obligation

- L'écart (ou spread) entre le taux facial de l'obligation et le taux sans risque du marché constitue une rémunération de l'acheteur :
 - ▶ la prime de liquidité correspond à une estimation du coût de transaction et d'immobilisation des capitaux ;
 - ▶ la prime associée au risque de défaut est basée sur l'estimation de la probabilité de défaut de l'emprunteur pendant la durée du prêt et du taux de recouvrement moyen anticipé pour cet emprunteur en cas de défaut (rôle des agences de notation).



Prix d'une obligation

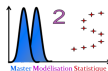
Exercice 8 (prix d'une obligation)

Soit une obligation de maturité $T = 7$ ans, de prix à l'émission $P = 1500\text{€}$, de remboursement in fine $R = 1500\text{€}$ et de coupons annuels constants $C = 100\text{€}$. On étudie deux scénarios :

- le taux de marché reste constant à 5% sur les 7 ans.
- le taux de marché passe de 5% à 6% à la fin de la deuxième année.

On suppose que les coupons touchés par l'investisseur sont immédiatement placés au taux du marché.

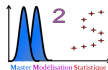
- 1 Pour chaque scénario, calculer le gain de l'investisseur à la fin de la 4ème année.
- 2 À la fin de la 4ème année, l'investisseur décide de vendre ses obligations. Calculer le prix de vente (VAN).



Prix d'une obligation

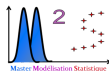
Conclusion

Le prix des obligations décroît lorsque le taux sans risque du marché croît (et inversement).



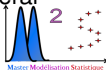
Plan du cours

- 1 Placement sans risque, taux d'intérêt, actualisation des prix
- 2 Obligations
- 3 SWAPs : Swaps de taux, swaps de devises**
- 4 Options de vente, options d'achat



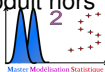
Notion de swap

- **swap** signifie **échange** en anglais
- Le swap est un produit dérivé financier qui constitue un **contrat d'échange de flux financiers** entre deux parties (généralement des banques ou des institutions financières) en basant ces échanges sur le cours d'un actif sous-jacent (taux d'intérêt, cours de matière première *etc.*).
- Les quatre contrats les plus courants sont :
 - ▶ le **swap de taux d'intérêt standard**, taux variables contre taux fixes, qui échange les intérêts d'un prêt à taux variable contre des intérêts à taux fixe ;
 - ▶ le **swap de devises** par lequel on échange des taux d'intérêt à moyen ou long terme libellés dans deux devises différentes ;
 - ▶ le **swap de risque de crédit** qui échange une protection sur le risque de crédit d'un émetteur d'obligations contre des versements périodiques et réguliers pendant la durée du swap ;
 - ▶ le **swap sur matière première** qui échange un prix fixe, déterminé au moment de la conclusion du contrat, contre un prix variable, en général calculé comme la moyenne d'un indice sur une période future.



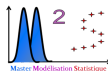
Notion de swap

- Le premier swap de devises à recevoir une vaste publicité fut une opération arrangée en 1981 par Salomon Brothers entre IBM et la Banque mondiale.
- Assez rapidement après, les banques d'investissement se sont lancés sur ce marché des swaps de taux d'intérêt standards qui a crû de manière exponentielle, jusqu'à devenir aujourd'hui le deuxième plus actif marché de taux du monde (434 000 milliards USD en 2010), juste derrière celui des principaux emprunts d'État.
- L'intérêt du swap est double :
 - ▶ Pour une banque : il n'y a pas d'échange de capital, seulement l'échange de flux financier ; le swap de taux d'intérêt est un instrument de gestion du risque de crédit ;
 - ▶ Pour une entreprise, ou pour une institution financière, le swap permet de modifier les caractéristiques d'actifs financiers, par exemple de taux fixe en taux variable, sans les sortir du bilan et sans encourir les conséquences fiscales ou comptables d'une telle sortie. On superpose ainsi un produit hors bilan, le swap, à un actif existant.



Swap de taux

- Un swap de taux est une opération dans laquelle deux contreparties contractent simultanément un prêt et un emprunt dans une même devise, pour un même nominal et une même échéance mais sur des références de taux différentes.
- Le swap ne donne pas lieu à d'échange de capital, seulement à l'échange des flux d'intérêts.
- Les caractéristiques du SWAP sont : devise de référence, nominal, date de départ et d'échéance, taux d'intérêt et fréquence de paiement.
- On distingue deux types de SWAP :
 - ▶ taux fixe contre taux variable ;
 - ▶ taux variable contre taux variable.



Exercice 9 : SWAP de taux Intel/Microsoft

Un swap entre Microsoft et Intel a eu lieu le 5 Mars 2007. Microsoft s'est engagé à payer le taux fixe 5% sur un principal de 100 millions de dollars. En retour, Intel paye les intérêts variables tous les 6 mois au taux Libor. La durée de ce swap est de 3 ans.

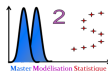
- Compléter le tableau suivant :

date	taux Libor 6 mois	flux variables	flux fixes	flux nets
05/03/07	4.20			
05/09/07	4.80			
05/03/08	5.30			
05/09/08	5.50			
05/03/09	5.60			
05/09/09	5.90			
05/03/10	6.40			

- On suppose que Microsoft a contracté par ailleurs une dette de 100 millions de dollars au taux Libor + 10 points de base (un point de base vaut 0.01%). Supposons de plus que le swap précédent soit réalisé. Montrer que Microsoft a ainsi réussi à convertir sa dette à taux variable en une dette à taux fixe.

Rôle de market-maker

- Dans la pratique, il est rare que deux entreprises aient au même moment des besoins parfaitement symétriques.
- Certaines institutions financières jouent le rôle de Market-Maker en acceptant de conclure un swap dans l'une des deux positions. Il est essentiel pour ces institutions de bien quantifier le risque et de se couvrir.
- Le taux demandé (bid) est le taux auquel le market maker accepte de payer le taux fixe et de recevoir le taux variable.
- Le taux offert (ask) est le taux auquel le market maker accepte de payer le taux variable et de recevoir le taux fixe.
- La différence ask-bid est le spread qui permet à l'intermédiaire de se rémunérer.



Valorisation d'un swap de taux

- Comment valoriser un swap de taux initié au temps $t = 0$ sur un nominal N taux fixe r contre taux variable avec échange d'intérêts en t_1, \dots, t_N ?
- Il est nécessaire pour cela d'estimer le taux d'intérêt variable sur une période $[t_i, t_{i+1}]$ au vu de la courbe des taux actuelle $r_{0,t}$. C'est la notion de taux forward :

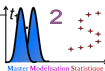
Definition

On appelle taux forward la quantité r_{0,t_1,t_2} donnée par la relation

$$(1 + r_{0,t_2})^{t_2} = (1 + r_{0,t_1})^{t_1} (1 + r_{0,t_1,t_2})^{t_2 - t_1}$$

et représentant l'anticipation au temps $t = 0$ de la valeur r_{t_1,t_2} .

- Justification : considérons que l'on place 1e de deux manières différentes
 - ▶ entre aujourd'hui et la date $t_2 \rightsquigarrow (1 + r_{0,t_2})^{t_2}$.
 - ▶ entre aujourd'hui et t_1 puis entre t_1 et $t_2 \rightsquigarrow (1 + r_{0,t_1})^{t_1} (1 + r_{t_1,t_2})^{t_2 - t_1}$



Valorisation d'un swap de taux

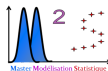
Proposition

La valeur d'un SWAP de taux (taux fixe r contre taux variable) sur un nominal N conclu entre les temps $t_0 = 0$ et t_N avec échanges d'intérêts en t_1, \dots, t_N est donnée par

$$\text{VAN} = N \left[1 - \rho_{0,t_N} - r \sum_{i=1}^N \rho_{0,t_i} (t_i - t_{i-1}) \right]$$

avec $\rho_{0,t_i} = \frac{1}{1+r_{0,t_i}}$ facteur d'actualisation.

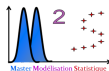
Preuve : au tableau



SWAP de devise

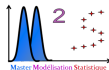
- Un swap de devise est une opération dans laquelle deux contreparties contractent simultanément un prêt et un emprunt dans 2 devises différentes pour une même valeur du nominal N .
- Exemple : une société mère A implantée au Japon décide de contracter un swap de devise avec une banque au Japon pour financer une filiale aux USA. Les conditions sont les suivantes :
 - ▶ à la date $t = 0$, taux de change $1\text{USD}=120\text{Y}$;
 - ▶ A emprunte 10M USD et prête 1200M Y sur 3 ans avec intérêts annuels de 8% en USD et 5% en Y ;
 - ▶ courbe des taux constantes à 9% en USD et 4% en Y.

Quel est le prix du SWAP en Y pour A ?



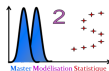
SWAP de devise

- Le swap permet les avantages suivants :
 - ▶ la filiale a reçu le capital et payé les intérêts en monnaie locale USD ;
 - ▶ les problèmes de taux de change entre filiale et maison mère sont évités (couverture contre le risque de change) ;
 - ▶ la filiale profite de la puissance de la maison mère pour obtenir des conditions avantageuses.



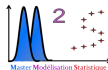
Plan du cours

- 1 Placement sans risque, taux d'intérêt, actualisation des prix
- 2 Obligations
- 3 SWAPs : Swaps de taux, swaps de devises
- 4 Options de vente, options d'achat



Notions de base

- Une option est un produit financier dérivé (i.e. portant sur un actif de base appelé sous-jacent) donnant à son acheteur un droit d'achat ou de vente futur à un prix prédéterminé (prix d'exercice ou strike).
- Les options sont généralement utilisées à des fins d'assurance ou de spéculation.
- Exemples :
 - ▶ Pour se prémunir contre les variations du prix du baril de pétrole brut, Air France contracte des option d'achat portant sur le brut lui garantissant un prix fixé à horizon d'un an.
 - ▶ Un spéculateur anticipe une forte baisse du cours de l'or d'ici 3 mois et achète des options de vente portant sur l'or lui garantissant un prix de vente fixé (remarquons qu'il n'est pas obligé de posséder de l'or).



Options plain vanilla

(call européen)

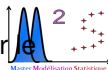
L'option d'achat (call) portant sur un actif sous-jacent S permet d'acheter au temps T (échéance) une unité d'actif au prix K (strike).

- On a intérêt à exercer l'option seulement si $S_T > K$ auquel cas en revendant immédiatement l'actif au prix S_T on dégage un bénéfice $S_T - K$. Le payoff de l'option est donc $(S_T - K)_+$.
- Le payoff n'est pas borné : le gain pour l'acheteur (et donc la perte pour le vendeur) est potentiellement arbitrairement grand.

(put européen)

L'option de vente (put) portant sur un actif sous-jacent S permet de vendre au temps T (échéance) une unité d'actif au prix K (strike).

- On a intérêt à exercer l'option seulement si $S_T < K$ auquel cas en revendant immédiatement l'actif au prix S_T on dégage un bénéfice $K - S_T$. Le payoff de l'option est donc $(K - S_T)_+$.
- Le payoff est borné : le gain pour l'acheteur (et donc la perte pour le vendeur) reste plus petit que le strike K .



Exercices

- Les options permettent l'effet levier (Exercice 12)
- Couverture d'un risque de change (Exercice 13)
- Stratégie Bull Call Spread (Exercice 14)

