Master Modélisation Statistique M2
Finance - chapitre 1

Gestion optimale de portefeuille, l'approche de Markowitz

Clément Dombry,
Laboratoire de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté.

Motivations

- Comment aider un investisseur à placer son argent sur un marché financier complexe comprenant plusieurs actifs financiers ?
- Nous étudions ici un modèle probabiliste simple de gestion de portefeuille basé sur l'approche monopériodique de Markowitz.
  Ce modèle s'intéresse exclusivement à l'évolution du cours des actifs entre 2 dates (i.e. sur une période de temps) et propose une répartition des fonds sur les différents actifs (i.e. une composition de portefeuille) optimale pour un critère espérance/variance.
- Ce modèle simple admet une solution simple mais ne tiend pas compte de problématiques importantes dans la pratique de la gestion de portefeuille comme la liquidité, la fiscalité, les coûts de transaction ...

Plan du cours

Notions de base

- On s'intéresse à l'évolution du cours d'un actif financier entre deux dates t_0 et t_1 et on note

$$\begin{aligned} V_0^A &: \quad \text{valeur de l'actif A au temps } t_0, \\ V_1^A &: \quad \text{valeur de l'actif A au temps } t_1. \end{aligned}$$

- On suppose :
  - V_0^A connu (cours à la date t_0 d'aujourd'hui),
  - V_1^A inconnu (cours à une date t_1 future)

  Pour tenir compte de l'incertitude du cours futur, on modélise V_1^A par une variable aléatoire.
- Question de base : comment comparer deux actifs A et B ?

Exemple I : utilité moyenne

- Considérons deux actifs A et B tels que :

$$V_0^A = V_0^B = 900€$$

et

$$\begin{cases} V_1^A = 920€ & \text{avec proba } 1/2 \\ V_1^A = 960€ & \text{avec proba } 1/2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} V_1^B = 1100€ & \text{avec proba } 4/5 \\ V_1^B = 150€ & \text{avec proba } 1/5 \end{cases}.$$

- Les valeurs initiales étant identiques, on pense naturellement à comparer les espérances

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_1^A] &= \frac{1}{2}920 + \frac{1}{2}960 = 940 \\ \mathbb{E}[V_1^B] &= \frac{4}{5}1100 + \frac{1}{5}150 = 910 \end{aligned}$$

et à préférer l'actif A.

Exemple I : utilité moyenne

- On suppose désormais que le placement doit servir à financer un achat de 1000€et on introduit la fonction d'utilité :

$$u(x) = (x - 1000)_+ = \max(x - 1000, 0)$$

- Notons que A ne permettra jamais de financer cet achat et que

$$\mathbb{E}[u(V_1^A)] = 0$$

tandis que

$$\mathbb{E}[u(V_1^B)] = \frac{4}{5}100 + \frac{1}{5}0 = 80$$

On est donc ammené à préférer B.

Règle 1 : maximisation de l'utilité moyenne

- Une fonction d'utilité est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$ et généralement concave. Par exemple

$$u(x) = -e^{-\alpha x} \ (\alpha > 0), \quad u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ (\alpha \geq 0), \quad u(x) = \log(x).$$

  Elle représente le comportement de l'investisseur.
- D'après les exemples précédent, un investisseur cherche à maximiser l'utilité moyenne :

Règle 1 - critère d'espérance

Etant donné deux actifs A et B de même cours initial $V_0^A = V_0^B$, un investisseur préférera l'actif maximisant l'utilité moyenne $\mathbb{E}[u(V_1^{A,B})]$.

Règle 2 : minimisation du risque

- Dans la suite du cours, on se place dans le contexte le plus fréquent de la fonction d'utilité linéaire $u(x) = x$.
- Comment comparer deux actifs tels que

$$V_0^A = V_0^B \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[V_1^A] = \mathbb{E}[V_1^B] \quad ?$$

- On introduit la notion de risque d'un actif mesuré par sa variance : plus la variance est élevée, plus l'actif est risqué.

Règle 2 - critère de variance

Etant donné deux actifs A et B de même cours initial $V_0^A = V_0^B$ et de même utilité moyenne $\mathbb{E}[V_1^A] = \mathbb{E}[V_1^B]$, un investisseur préférera l'actif minimisant la variance $\mathrm{Var}[V_1^{A,B}]$.

Exemple II : rôle de la corrélation

- Considérons deux actifs de même valeur initiale $V_0^A = V_0^B$ tels que

$$\mathbb{E}[V_1^A] = m_1^A \leq \mathbb{E}[V_1^B] = m_1^B$$

et de variance

$$\mathrm{Var}[V_1^A] = \sigma_A^2, \quad \mathrm{Var}[V_1^B] = \sigma_B^2.$$

- On considère un portefeuille contenant une proportion x d'actif A et $1 - x$ de B

$$P^x = xV^A + (1-x)V^B, \quad x \in \mathbb{R}.$$

  - La valeur initial est $P_0^x = V_0^A = V_0^B$.
  - Lorsque $x \in [0, 1]$, on a $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ (achat classique).
  - Sinon, on a $x < 0$ ou $1 - x < 0$ (vente à découvert).

Exemple II : rôle de la corrélation

- Le portefeuille P^x a pour caractéristiques

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P_1^x] &= xm_1^A + (1-x)m_1^B \in [m_1^A, m_1^B] \\ \mathrm{Var}[P_1^x] &= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B\end{aligned}$$

  avec $\rho_{A,B} = \mathrm{corr}(V_1^A, V_1^B)$.
- On remarque que la variance du portefeuille P_1^x dépend de façon monotone de la corrélation $\rho_{A,B}$:
  - croissante si $x \in [0, 1]$,
  - décroissante sinon.

Exemple II : rôle de la corrélation

- Lorsque $m_A = m_B$, tous les portefeuilles ont la même espérance finale. Quelle est le portefeuille de risque minimal ?
- Il s'obtient en minimisant

$$(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B)X^2 + 2(\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B - \sigma_B^2)X + \sigma_B^2$$

conduisant au portefeuille optimal

$$x^* = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}.$$

- La contrainte $x^* \in [0, 1]$ n'est pas toujours respectée, ce qui peut s'interpréter comme un portefeuille avec vente à decouvert.
  Si on souhaite respecter la contrainte $x^* \in [0, 1]$ (vente à découvert interdite), on posera

$$x^* = 0 \text{ si } x^* < 0 \quad \text{et} \quad x^* = 1 \text{ si } x^* > 1.$$

Exemple III : rôle de la diversification

- On considère n titres $A_1, \ldots, A_n$ supposés « interchangeables » tels que

$$V_0^{A_i} = m_0, \quad \mathbb{E}[V_1^{A_i}] = m_1, \quad \mathrm{Var}[V_1^{A_i}] = \sigma^2$$

  et

$$\mathrm{Cov}(V_1^{A_i}, V_1^{A_j}) = \rho\sigma^2 \quad \text{pour } i \neq j.$$

- On considère le portefeuille $P^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V^{A_i}$ formé de n titres en proportions égales.
- On calcule de manière simple

$$P_0^n = m_0, \quad \mathbb{E}[P_1^n] = m_1, \quad \mathrm{Var}[P_1^n] = \frac{1-\rho}{n}\sigma^2 + \rho\sigma^2.$$

- Interprétation : le risque décroît en diversifiant l'investissement sur les différents titres.

Notion de rendement

- Lorsque l'on travaille avec la fonction d'utilité linéaire $u(x) = x$, il est commode d'introduire le rendement d'un actif afin de comparer des actifs n'ayant pas la même valeur initiale.

Définition

Le rendement d'un titre prenant les valeurs $V_0 > 0$ et $V_1 \geq 0$ est

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

- Remarques :
  - en anglais, rendement $\rightsquigarrow$ return.
  - On a toujours $R \geq -1$.
  - $R > 0$ en cas de hausse, $R < 0$ en cas de baisse.
  - On a une bijection $(V_0, V_1) \Leftrightarrow (V_0, R)$, en effet $V_1 = V_0(1 + R)$.
  - En général, V_0 est connu et R est une variable aléatoire.

Master Modélisation Statistique

Notion de rendement

- L'intérêt du rendement est de pouvoir comparer deux actifs n'ayant pas la même valeur initiale.
- Exemple :

$$\text{A} : \quad V_0^A = 110, \qquad V_1^A = 120$$

$$\text{B} : \quad V_0^B = 55, \qquad V_1^A = 61$$

Analyse :

  - Le titre A permet un bénéfice de 10, le titre B seulement de 6.
  - En achetant deux titres B au même prix que A, bénéfice de 12.
  - Les rendements sont :

$$R_A = \frac{120 - 110}{110} \approx 0,091 \quad \text{et} \quad R_B = \frac{61 - 55}{55} \approx 0,109.$$

Notion de rendement

Le raisonnement précédent se généralise aisément et permet de montrer que dans le cas de l'utilité linéaire $u(x) = x$, les règles d'investissement de maximisation de l'utilité moyenne et minimisation du risque sont équivalentes à la règle suivante :

Règle espérance-variance

Soient deux titres de rendement R_A et R_B.

- Si $\mathbb{E}[R_A] \geq \mathbb{E}[R_B]$, l'investisseur préfèrera le titre A.
- Si $\mathbb{E}[R_A] = \mathbb{E}[R_B]$ et $\mathrm{Var}[R_A] \leq \mathrm{Var}[R_B]$, l'investisseur préfèrera le titre A.

Plan du cours

Cadre mathématique et notations

- On considère un marché composé de d actifs risqués $A_1, \ldots, A_d$ et d'un actif non risqué A_0 sur une période $[t_0, t_1]$.
- On note

$$\begin{aligned} V_0^{A_i} &= \text{valeur de l'actif } A_i \text{ au temps } t_0, \\ V_1^{A_i} &= \text{valeur de l'actif } A_i \text{ au temps } t_1. \end{aligned}$$

- Les valeurs initiales $(V_0^{A_i})_{0 \leq i \leq d}$, sont connues ainsi que $V_1^{A_0}$ (actif sans risque).
- Les valeurs finales des actifs risqués $(V_1^{A_i})_{1 \leq i \leq d}$ sont aléatoires.

Cadre mathématique et notations

- Un investisseur achète une quantité α_i de titres A_i, $0 \leq i \leq d$.
- Le vecteur $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^{d+1}$ représente la composition du portefeuille noté P^α.
- On autorise les valeurs α_i négatives ce qui correspond à des ventes à découvert mais on suppose la valeur initiale du portefeuille positive :

$$P_0^\alpha = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i V_0^{A_i} \geq 0.$$

- La valeur finale du portefeuille

$$P_1^\alpha = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i V_1^{A_i}$$

peut être négative.

Rendement d'un portefeuille

- Peut-on calculer le rendement R_α du portefeuille P^α en fonction des rendements $(R_i)_{0\leq i\leq d}$ des actifs A_i ?
- La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition (rendement d'un portefeuille)

Le rendement du portefeuille P^α est donné par

$$R_\alpha = \sum_{i=0}^{d} x_i R_i$$

avec x_i la proportion initiale en valeur de l'actif A_i dans le portefeuille

$$x_i = \frac{\alpha_i V_0^{A_i}}{P_0^\alpha}.$$

Preuve : à faire en exercice, $R_\alpha = \frac{P_1^\alpha - P_0^\alpha}{P_0^\alpha} = \cdots$

Rendement d'un portefeuille

- Remarques :
  - Lorsqu'on s'intéresse au rendement, on n'a pas besoin de connaître la composition exacte du portefeuille et sa valeur initiale mais seulement les valeurs relatives $(x_i)_{1\leq i\leq d}$.
  - Remarquons que $\sum_{i=0}^{d} x_i = 1$.
  - On peut donc représenter la composition relative d'un portefeuille par un vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d$ et poser $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{d} x_i$.
- On obtient la formule

Proposition (rendement d'un portefeuille)

Le rendement d'un portefeuille de composition relative $x = (x_i)_{1\leq i\leq d}$ est donné par

$$R_x = R_0 + \sum_{i=1}^{d} x_i(R_i - R_0)$$

où $R_i - R_0$ s'interprète comme le rendement excédentaire de l'actif A_i (par rapport à l'actif sans risque A_0).

Espérance et variance du rendement

On introduit le rendement excédentaire moyen des actifs risqués

$$\mu_i = \mathbb{E}[R_i] - R_0, \quad 1 \leq i \leq d$$

et la matrice de covariance des rendements $\Gamma = (\mathrm{Cov}(R_i, R_j))_{1\leq i,j\leq d}$.

Proposition (espérance et variance du rendement)

Le rendement d'un portefeuille de composition relative $x = (x_i)_{1\leq i\leq d}$ a pour espérance

$$\mathbb{E}[R_x] = R_0 + \sum_{i=1}^{d} x_i\mu_i = R_0 + \mu' x$$

et variance

$$\mathrm{Var}[R_x] = x'\Gamma x$$

Preuve : facile ...

Notion de portefeuille M-V efficace

- La notion suivante est centrale dans l'approche de Markowitz.

Définition (portefeuille M-V efficace)

Un portefeuille P est dit M-V efficace si parmi tous les portefeuilles de même rendement moyen, P présente le risque le plus faible au sens où la variance du rendement est minimale.

- C'est une notion d'optimalité mettant en jeu les critères de moyenne (M) et variance (V).
- Dans ce modèle, l'investisseur préfère toujours les portefeuilles M-V efficace.
- En représentant un portefeuille P par sa composition relative x et en utilisant la proposition précédente, on a formellement

$$x \in \mathbb{R}^d \text{ est M-V efficace}$$

si et seulement si

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i=1}^{d} y_i \mu_i = \sum_{i=1}^{d} x_i \mu_i \Rightarrow y' \Gamma y \geq x' \Gamma x.$$

Caractérisation des portefeuilles M-V efficaces

On rappelle que $\mu_i = \mathbb{E}[R_i] - R_0$ est le rendement excédentaire moyen de l'actif A_i et on note $\mu = (\mu_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$.

Théorème

On suppose la matrice de covariance des rendements Γ inversible.
Un portefeuille $x \in \mathbb{R}^d$ est M-V efficace si et seulement si x est colinéaire à $\Gamma^{-1}\mu$.

- Le vecteur $x_M = \Gamma^{-1}\mu$ apparaît comme une caractéristique du marché et s'interprète comme un fond commun de placement.
- **Deux preuves :** multiplicateurs de Lagrange ou géométrie euclidienne.

Portefeuilles M-V efficace de rendement moyen fixé

Dans toute la suite,on suppose Γ inversible.

Corollaire

Étant donné un réel $r \geq R_0$, il existe un unique portefeuille M-V efficace de rendement moyen r et sa composition relative est donnée par

$$x(r) = \frac{r - R_0}{\mu' \Gamma^{-1} \mu} \Gamma^{-1} \mu.$$

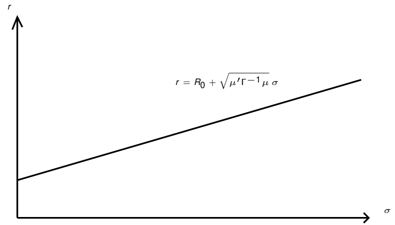
De plus, le risque $\sigma(r) = \sqrt{\mathrm{Var}[R_{x(r)}]}$ vérifie la relation affine

$$r = R_0 + \sqrt{\mu' \Gamma^{-1} \mu}\, \sigma(r)$$

- Dans ce modèle, les investisseurs utilisent tous le fond commun de placement $x_M = \Gamma^{-1} \mu$.

Remarques

- Pour un portefeuille M-V efficace, rendement moyen r et risque σ (mesuré comme l'écart type du rendement) sont liés par une relation linéaire.



- Plus l'investisseur est « gourmand » en terme de rendement moyen visé, plus il doit accepter de prendre de risques.
- De manière symétrique au corollaire précédent, pour un niveau de risque fixé à l'avance σ, il existe un unique portefeuille M-V efficace $x(\sigma)$ de risque σ. Quelle est sa composition ?

Remarques

- Exemple : mandats de gestion en assurance vie (source : Boursorama Banque)
  - **Mandat défensif :** L'objectif est la valorisation régulière du capital avec une faible exposition aux fluctuations des marchés financiers et une volatilité cible inférieure à 5%. L'investissement est effectué majoritairement en produits de taux.
  - **Mandat équilibré :** L'objectif est une valorisation attractive du capital grâce à une gestion discrétionnaire et de convictions, dans le cadre d'un risque contrôlé (volatilité cible inférieure à 10%). Le mandat est très largement diversifié pour permettre une exposition équilibrée sur les marchés d'actions internationaux et de taux.
  - **Mandat dynamique :** Le mandat a pour objectif la recherche d'une croissance dynamique, avec une volatilité cible inférieure à 16%. Il est exposé majoritairement sur les principaux marchés actions.
  - **Mandat offensif :** Le mandat a pour objectif de valoriser offensivement le capital à travers une très forte exposition aux marchés actions, notamment à ceux des pays émergents.

Plan du cours

Marché sans vente à découvert

- Lorsque le marché ne permet pas les ventes à découvert d'actifs, on doit considérer seulement les portefeuilles définis par

$$\alpha_0 \in R, \quad \alpha_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq d$$

et les compositions relatives vérifient donc

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq d.$$

- Si on ne veut ni vente à découvert d'actif, ni emprunt de numéraire, on doit avoir

$$\alpha_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq d$$

et donc

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq d \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1.$$

Portefeuille MV-efficace

- Pour déterminer le portefeuille MV-efficace de rendement moyen $r > R_0$, on est donc conduit à trouver le point réalisant le minimum de la variance

$$\mathrm{Var}[R_x] = x'\Gamma x$$

sous les contraintes

$$\mathbb{E}[X] = R_0 + \mu' x = r$$

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq d \quad \text{et éventuellement} \quad \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1.$$

Cet ensemble peut être vide !

- On ne dispose malheureusement pas de formule simple explicite, mais des algorithmes efficaces sont disponibles (optimisation d'une fonction quadratique sous contrainte affine).

Interprétation géométrique

- Si on considère la norme euclidienne $\|x\|^2 = x'\Gamma x$, le portefeuille MV-efficace de rendement r s'interprête comme le projeté orthogonal du point 0 sur l'ensemble convexe

$$C(r) = \left\{ x \in [0,\infty)^d; \mu' x = r - R_0 \quad \text{et} \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\}.$$

Plan du cours